

- Heute:
- Serienachbesprechung
 - Hesse-Test
 - Viele Übungsaufgaben

Aufgabe 3: Taylorpolynom 3. Ordnung für $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$ um $(0,0)$.

Wir sehen bei $(0,0)$ ist $f(0,0) = \cos(0)$. Also verhält sich f lokal wie der Cosinus!

Das heißt $f(x,y) = \cos(x^2+y^2) \approx 1 - \frac{(x^2+y^2)^2}{2} + \dots = 1 - \frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{2} + \dots = 1 - \frac{x^4}{2} - \frac{2x^2y^2}{2} - \frac{y^4}{2} + \dots = 1$.

Aufgabe 4: Taylorpolynom 3. Ordnung von $f(u,v) = e^u \ln(1+v)$ um $(0,0)$.

Wir entwickeln um $(u,v) = (0,0)$ also verhält sich f wie das Produkt von

e^u und $\ln(1+v)$ entwickelt um $(0,0)$. Wir kennen beide eindimensionalen Entwicklungen.

$e^u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \dots$ und $\ln(1+v) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} v^k}{k} = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} - \dots$

Man schreibt hier auch gerne $O(v^4)$ um zu gewährleisten, dass nur Terme der Ordnung 4 und höher vorkommen

Also folgt für $f(u,v) = \left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + O(u^4)\right) \left(v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} + O(v^4)\right)$

$$= v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} + uv - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2v}{2} - \frac{u^2v^2}{4} + \frac{u^3v}{6} - \frac{u^3v^2}{12} + \frac{u^3v^3}{18} + O((u,v)^4)$$

$$= v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} + uv - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2v}{2} + O((u,v)^4)$$

Damit folgt $P_3(f) = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} + uv - \frac{uv^2}{2} + \frac{u^2v}{2}$.

Hesse-Test:

Wir sind an einem kritischen Punkt (x_0, y_0) also $\nabla f(x_0, y_0) = 0$.

Frage: Wann ist (x_0, y_0) ein lokales Maximum, Minimum, Sattelpunkt?

In 1-Dimension war es das Vorzeichen von $\frac{d^2f}{dx^2}$, denn wir haben einfach:

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots$

wel $f'(x_0) = 0$ *parabel*

Also verhält sich $f(x) - f(x_0) \approx \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$

↑ Vorzeichen bestimmt ob nach oben oder unten geöffnet.
Wenn $f''(x_0) = 0$ kann es ein Sattelpunkt sein.
Muss es nicht sein $f(x) = x^4$ bei 0.

Analog in 2-Dimensionen mittels Taylor: $f(x) - f(x_0) = \underbrace{\langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \rangle}_{=0} + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}, Hf(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\rangle + \dots$

Also verhält sich $f(x) - f(x_0) \approx \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}, Hf(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\rangle$ Die Definitheit von $Hf(x_0, y_0)$ bestimmt die

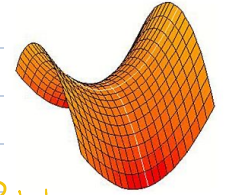
Art der Bilinearform $\langle \cdot, Hf(x_0, y_0) \cdot \rangle$.

Wenn $Hf(x_0, y_0)$ positiv-definit, so gilt: $\langle v, Hf(x_0, y_0) v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0)$ *Minimum*

Wenn $Hf(x_0, y_0)$ negativ-definit, so gilt: $\langle v, Hf(x_0, y_0) v \rangle \leq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0)$ *Maximum*

Wenn $Hf(x_0, y_0)$ indefinit und nicht ausgeartet, so ist (x_0, y_0) ein Sattelpunkt.

Intuitiv gibt es dann eine Richtung Maximum und eine Richtung Minimum:



Pringles - Form

5.3 Hesse-Test und Klassifikation kritischer Punkte

Satz 5.5 (HESSE-TEST)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f \in C^3(U)$, und sei $(x_0, y_0) \in U$ ein kritischer Punkt resp. $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Sei $Hf(x_0, y_0)$ die Hesse-Matrix (siehe Definition 4.26) von f im Punkt (x_0, y_0) .

- (1) Wenn $Hf(x_0, y_0)$ positiv definit ist, dann hat f ein striktes lokales Minimum bei (x_0, y_0) .
- (2) Wenn $Hf(x_0, y_0)$ negativ definit ist, dann hat f ein striktes lokales Maximum bei (x_0, y_0) .
- (3) Wenn $Hf(x_0, y_0)$ indefinit und nicht ausgeartet ist, dann hat f kein lokales Extremum bei (x_0, y_0) . In diesem Fall wird (x_0, y_0) als Sattelpunkt bezeichnet.

Erinnerung an LinAlg:

5.2 Definitheit von Matrizen

Definition 5.3 (DEFINITHEIT EINER SYMMETRISCHEN MATRIX)

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst:

- (1) **Positiv definit**, wenn alle ihre Eigenwerte positiv sind.
- (2) **Negativ definit**, wenn alle Eigenwerte negativ sind.
- (3) **Indefinit**, wenn mindestens ein Eigenwert positiv und mindestens ein Eigenwert negativ ist.
- (4) **Ausgeartet**, wenn null ein Eigenwert ist.

Bemerkung 5.4

Merke, dass wir im folgenden Teil nur die Hesse-Matrix betrachten und diese nach dem Satz von Schwarz immer symmetrisch ist.

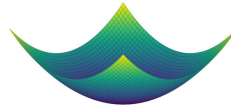
Siehe Lineare Algebra

Nach dem Spektralsatz ist eine symmetrische Matrix orthogonal diagonalisierbar. Damit ist sie eindeutig durch ihre Eigenwerte in der Eigenbasis charakterisiert. Die Eigenvektoren stehen dabei orthogonal. Das sind intuitiv die zwei Maximalen Krümmungsrichtungen. Die Eigenwerte sagen ob positiv oder negativ gekrümmt (Vorzeichen) und wie stark.

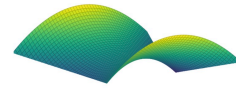
Wichtiges Beispiel:

Beispiel 5.7

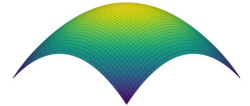
Wir betrachten die drei unten abgebildeten Funktionen.



$$f_1(x, y) = x^2 + y^2$$



$$f_2(x, y) = x^2 - y^2$$



$$f_3(x, y) = -x^2 - y^2$$

Wir merken, dass für alle drei Fälle $x_0 = (0, 0)$ ein kritischer Punkt ist. Wir möchten die Art dieses kritischen Punktes nun mit dem Hesse-Test analysieren. Die entsprechenden Hesse-Matrizen für die drei Funktionen sind

$$Hf_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad Hf_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{und} \quad Hf_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Wir können die Eigenwerte der Diagonalmatrizen direkt ablesen und sehen, dass Hf_1 positiv definit und Hf_3 negativ definit sind. Damit haben wir im ersten Fall ein Minimum und im zweiten Fall ein Maximum. Der erste Hauptminor ist positiv, aber der zweite negativ. Damit ist sie indefinit und nicht ausgeartet und f_2 hat bei Null einen Sattelpunkt.

Aufgabe [2024 S] Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = e^x + xy.$$

Welche der folgenden Aussagen über diese Funktion ist korrekt?

- (a) Die gegebene Funktion besitzt genau einen Sattelpunkt.
- (b) Die gegebene Funktion besitzt genau ein lokales Maximum.
- (c) Die gegebene Funktion besitzt genau ein lokales Minimum.
- (d) Die gegebene Funktion besitzt mehrere kritische Punkte.

Prüfung HS 2024

16. 6 Punkte

Wir betrachten eine Bakterienpopulation in einer runden, kreisförmigen Petrischale vom Durchmesser 5cm. Die Bakterienkonzentration sei durch die folgende Funktion beschrieben (in tausend Bakterien pro cm^2)

$$\rho(x, y) = \exp(-x^2 - y^2) = e^{-x^2 - y^2}$$

Das Koordinatensystem, in welchem wir arbeiten, sei so gelegt, dass der Ursprung dieses Koordinatensystems mit dem Zentrum der betrachteten Petrischale übereinstimmt.

b) 2 Punkte

Stellen Sie sich vor, dass Sie den Punkt $(1, 0)$ in der Petrischale betrachten. In welcher Richtung muss man sich bewegen, um keine Zunahme zu beobachten?

c) 2 Punkte

Wir betrachten nun die leicht modifizierte Dichtefunktion

$$\delta(x, y) = \exp(-a(x-1)^2 - (y-d)^2) = e^{-a(x-1)^2 - (y-d)^2}$$

Wie müssen die Parameter a und d gewählt werden, damit

- i) die Funktion $\delta(x, y)$ an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ihr Maximum annimmt und
- ii) die Funktion an der Stelle $(x^*, y^*) = (5, 0)$ den Wert e^{-9} annimmt, dass also gilt $\delta(5, 0) = e^{-9}$?

Prüfung WS 2025

12. Gegeben ist die folgende Funktion in zwei Variablen

$$f(x, y) = \ln(x^2) + xy^2 - 3y \quad (x \neq 0),$$

welche wir insbesondere an der Stelle $(1, 1)$ betrachten.

In welcher der folgenden Richtungen beträgt die momentane Veränderungsrate gerade 1?

- (a) In Richtung $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$.
- (b) In Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- (c) In Richtung $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- (d) In Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

